1

باسمه تعالی

فصل اول: ریاضیات مهندسی در اعداد مختلط

تعریف اعداد مختلط: مجموعه اعداد مختلط، که آن را با حرف C (اول کلمه complex) نمایش می‌دهیم، شامل کلیه اعدادی به شکل $z=a+ib$ است که در آن a و b اعدادی حقیقی بوده و i، واحد مختلط، دارای خاصیت $i^2=-1$ (یا $i=\sqrt{-1}$).

عدد a بخش حقیقی و عدد b بخش موهومی z نامیده می‌شود و می‌نویسیم:

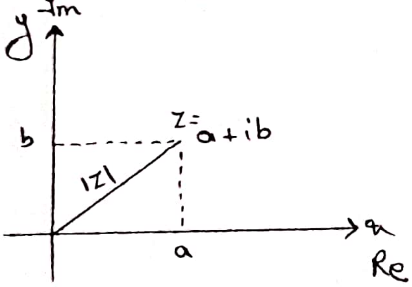
$a=Re(z)$, $b=Im(z)$

اگر $a=0$، آنگاه عدد $z=ib$ یک عدد موهومی محض و

اگر $b=0$، آنگاه عدد $z=a$ یک عدد حقیقی محض نامیده می‌شود.

مثلاً عدد $2i-$ یک عدد موهومی محض و عدد $5-$ یک عدد حقیقی محض می‌باشد.

برای نمایش اعداد مختلط، ما از صفحه مختلط استفاده می‌کنیم. عدد $a+ib$ به صورت هندسی به عنوان نقطه‌ای به مختصات (a,b) در صفحه دکارتی تعبیر می‌شود. محور x را محور حقیقی و محور y را محور موهومی می‌نامند.



مبدأ مختصات متناظر با عدد مختلط صفر است.

* قدر مطلق z یعنی فاصله‌ی نقطه z تا مبدأ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

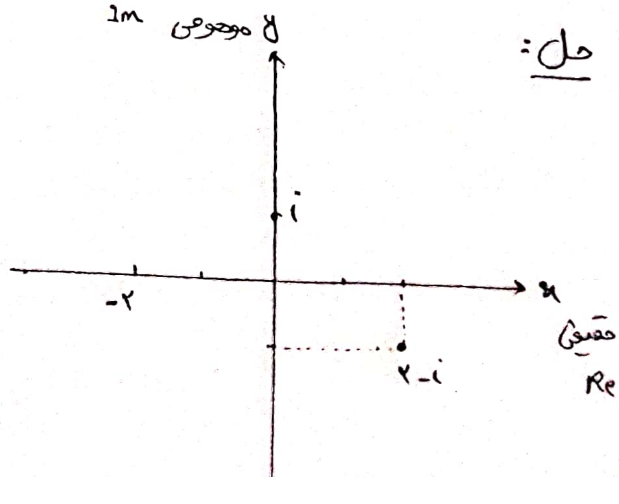
مثال ۱: قسمت حقیقی و موهومی اعداد مختلط i ، $2-$ و $2-i$ را مشخص نمایید و نقاط داده شده را روی دستگاه مختصات نمایش دهید

حل:

$Re(i)=0$, $Im(i)=1$

$Re(-2)=-2$, $Im(-2)=0$

$Re(2-i)=2$, $Im(2-i)=-1$



مثال ۲: حاصل $(i)^{1398}$ کدام یک از مقادیر زیر است؟

○ $-i$　○ i　○ $+1$　✓ -1

حل: $1398 \div 2 = 699 \Rightarrow (i)^{1398} = (i)^{2\times 699} = \left((i)^2\right)^{699} = (-1)^{699} = -1$

می دانیم $\boxed{i^2 = -1}$

تساوی دو عدد مختلط: اگر $Z_1 = a_1 + ib_1$ و $Z_2 = a_2 + ib_2$، آنگاه شرط لازم و کافی برای تساوی Z_1 و Z_2 این است که داشته باشیم $a_1 = a_2$ و $b_1 = b_2$. یعنی قسمت های حقیقی و موهومی دو طرف تساوی را برابر یکدیگر قرار می دهیم، تا جواب معادله نتیجه شود.

* رابطه ی ترتیبی در اعداد مختلط تعریف نمی شود.

مثال ۳: معادله ی $x^2 + (2x+y)i = 4 - 3i$ را حل کنید.

حل:

$x^2 = 4 \Longrightarrow \boxed{x = \pm 2}$

$2x + y = -3 \xrightarrow{x=2} 4 + y = -3 \Longrightarrow \boxed{y = -7}$

$\xrightarrow{x=-2} -4 + y = -3 \Longrightarrow \boxed{y = 1}$

---

* روی مجموعه اعداد مختلط، چهار عمل اصلی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم، چنین تعریف می شوند:

$$Z_1 \pm Z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2)$$

$$Z_1 Z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_2 y_1 + x_1 y_2)$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

اثبات: $Z_1 Z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + ix_1 y_2 + ix_2 y_1 + i^2 y_1 y_2$

$$= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

* $a-ib$ را مزدوج $a+ib$ می‌نامند. مزدوج عدد مختلط z را با $\bar{z}$ نمایش می‌دهند.

اثبات تقسیم:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\times\frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+i(y_1x_2-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

در مزدوج ضرب کردیم [illegible]

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

مثال ۴: با فرض $z_1=2+3i$, $z_2=6-5i$ حاصل z_1+z_2 ، z_1-z_2 ، z_1z_2 , $\frac{z_1}{z_2}$ را بیابید:

حل:

$$\boxed{z_1+z_2=(2+3i)+(6-5i)=(2+6)+i(3-5)=8-2i}$$

$$\boxed{z_1-z_2=(2+3i)-(6-5i)=(2-6)+i(3+5)=-4+8i}$$

$$\boxed{z_1z_2=(2+3i)(6-5i)=12-10i+18i-15i^2=12+15+i(-10+18)=27+8i}$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2}\ \underline{\underline{\text{با استفاده از فرمول}}}\ \frac{2+3i}{6-5i}=\frac{12+(-15)}{36+25}+i\,\frac{18-(-10)}{36+25}=\frac{-3}{61}+i\,\frac{28}{61}}$$

مثال ۵: اگر $z_1=-3-4i$, $z_2=2-i$ آنگاه حاصل z_1+z_2 ، z_1-z_2 ، z_1z_2 ، $\frac{z_1}{z_2}$, $\frac{1}{z_1z_2}$ را حساب کنید.

حل:

$$z_1+z_2=-1-5i$$

$$z_1-z_2=-5-3i$$

$$z_1z_2=-6-4+i(-8+3)=-10-5i$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{-6+4}{5}+i\,\frac{-8-3}{5}=\frac{-2}{5}-\frac{11}{5}i$$

$$\frac{1}{z_1z_2}=\frac{1}{-10-5i}\times\frac{-10+5i}{-10+5i}=\frac{-10+5i}{100+25}=\frac{-10}{125}+\frac{5}{125}i$$

---

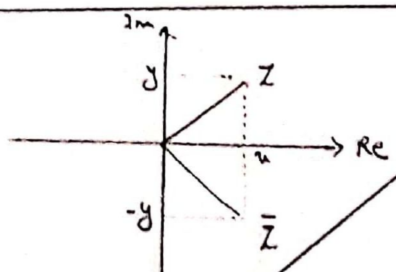
* با توجه به تعریف مزدوج عدد $z\overset{x+iy}{=}$ ، می‌توان نوشت:

$$z+\bar{z}=2x$$

$$z-\bar{z}=2iy$$

$$\boxed{z\bar{z}=x^2+y^2=|z|^2}$$

$$z/\bar{z}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+i\,\frac{2xy}{x^2+y^2}$$



* به عبارت دیگر حاصل جمع و ضرب هر عدد مختلط با مزدوج خود، یک عدد حقیقی است، اما حاصل تفریق و تقسیم آن‌ها یک عدد موهومی می‌باشد.

مثال ۶: کمیت‌های زیر را مشخص کنید.

$$Re\left[(1+i)(2+i)\right] \overset{\text{حل}}{=} Re\left[2-1+i(2+1)\right] = 1$$

$$Re\left[\frac{4-3i}{2-i}\right] = \frac{8+3}{4+1} = \frac{11}{5}$$

$$Im\left[(x_1 - iy_1)^2\right] = -2x_1y_1$$

$$Im\left[(x_1+iy_1)(x_1-iy_1)\right] = 0$$

مثال ۷: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$2x-3iy+4ix-2y-5-10i = (x+y+2)-(y-x+3)i$$

حل:

$$2x-2y-5 = x+y+2 \longrightarrow \begin{cases} x-3y=7 \\ 3x-2y=7 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -3x+9y=-21 \\ 3x-2y=7 \end{cases}$$

$$4x-3y-10 = -y+x-3$$

$$7y=-14$$

$\boxed{y=-2}$ با جاگذاری در یکی از معادلات دلخواه $3x-2(-2)=7$ داریم $\boxed{x=1}$.

مثال ۸: محاسبات زیر را انجام داده و جواب را به صورت $a+bi$ بنویسید.

$$(3-2i)-i(4+5i) \xrightarrow{\text{حل}} 3-2i-4i-5i^2 = \boxed{8-6i}$$

$$\frac{(4-i)(1-3i)}{-1+2i} \overset{\text{حل}}{=} \frac{4-3+i(-12-1)}{-1+2i} = \frac{1-13i}{-1+2i} \times \frac{-1-2i}{-1-2i} = \frac{-1-26+i(-2+13)}{1+5}$$

$$= \boxed{\frac{-27+11i}{6}}$$

---

* مزدوج مزدوج Z، خود Z است، یعنی $\overline{(\overline{Z})} = Z$.

* برای محاسبه $\frac{Z_1}{Z_2}$ کافی است صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب کنیم، تا مخرج، یک عدد حقیقی شود. (با یادگیری این قاعده، دیگر نیازی به حفظ فرمول تقسیم اعداد مختلط نداریم).

مثال ۹: حاصل $\frac{3-i}{1-2i}$ را به دست آورید.

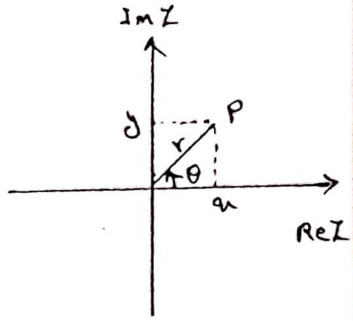
حل: $\frac{3-i}{1-2i} \times \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{3+6i-i+2}{1+4} = \frac{5+5i}{5} = \boxed{1+i}$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

شکل قطبی اعداد مختلط: به دلیل طبیعت دو بعدی اعداد مختلط، می توان از مختصات قطبی نیز برای نامیدن عدد مختلط غیرصفر $z = a+ib$ استفاده نمود. اگر $a = r\cos\theta$ ، $b = r\sin\theta$، آنگاه برای $z \neq 0$ داریم:



$$z = a+ib = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

که در آن

$$r = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\theta = \text{Arc}\,tg\,\frac{y}{x} = tg^{-1}\frac{y}{x} \quad \text{یا} \quad tg^{-1}\frac{b}{a}$$

نکته: برای هر $n \in \mathbb{N}$ با استقرا ثابت می شود:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

رابطه فوق به فرمول <u>دوموآور</u> معروف است که برای به توان رساندن اعداد مختلط، مورد استفاده قرار می گیرد.

مثال ۱۰: حاصل عبارت $(1-i)^4$ را بدست آورید.

حل:

$$z = 1-i \Longrightarrow a = 1 \,,\, b = -1 \Longrightarrow \boxed{r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}}$$

(یعنی $\text{Arc}\,tg\,x$ ، tg چه زاویه ای می شود x) $\boxed{\theta = \text{Arc}\,tg\left(\frac{-1}{1}\right) = tg^{-1}(-1) = \frac{-\pi}{4}}$

(می دانیم $tg\,45^\circ = 1$ ، $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$)

$$(1-i)^4 \underset{\text{تبدیل مختصات قطبی}}{=\!=} \left[\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)\right]^4 \underset{\text{فرمول دوموآور}}{=} 2^2\,(\underbrace{\cos(-\pi)}_{=\cos\pi = -1} - i\sin\pi) = \boxed{-4}$$

مثال ۱۱: شکل قطبی عدد $z = 1+i$ را بدست آورید.

حل:

$$z = 1+i \Longrightarrow a = 1 \,,\, b = 1 \Longrightarrow r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \text{Arc}\,tg\,\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Longrightarrow 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

خواص قدرمطلق :

۱) $|z| \geq 0 \quad , \quad |z| = 0 \iff z = 0$

۲) $|z| = |\bar{z}|$

۳) $|z|^2 = z\bar{z}$

۴) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

۵) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

۶) $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

۷) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$

۸) $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$

۹) $|z_1 w_1 + z_2 w_2 + \cdots + z_n w_n| \leq \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}\ \sqrt{|w_1|^2 + \cdots + |w_n|^2}$ نامساوی کوشی-شوارتز

مثال ۱۲: اگر z_1 و z_2 دو عدد مختلط باشند، آن‌گاه حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$|z_1+z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 \underset{\text{با جایگذاری روابط ۷ و ۸}}{\overset{\text{حل}}{=}} |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) - |z_1|^2 - |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$$

$$= 4\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$$

مثال ۱۳: اگر z_1 و z_2 دو عدد مختلط باشند، بطوریکه $|z_1| = 1$، نشان دهید $|1 - \bar{z}_1 z_2| = |z_1 - z_2|$.

حل: با استفاده از روابط ۲ و ۳ داریم :

$$|z_1| = |\bar{z}_1| = 1 \Rightarrow \boxed{z_1\bar{z}_1 = |z_1|^2 = 1}$$

$$|1 - \bar{z}_1 z_2| = |z_1\bar{z}_1 - \bar{z}_1 z_2| = |\bar{z}_1(z_1 - z_2)| \overset{۴}{=} |\bar{z}_1||z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|$$

$|\bar{z}_1| = 1$

باسمه تعالی

فصل دوم ریاضیات مهندسی « سری‌ها فوریه »

تعاریف و مفاهیم اولیه :

i) تابع $f(x)$ را متناوب با دوره تناوب T گوییم، اگر برای هر عدد صحیح n داشته باشیم:

$$f(x+nT)=f(x)$$

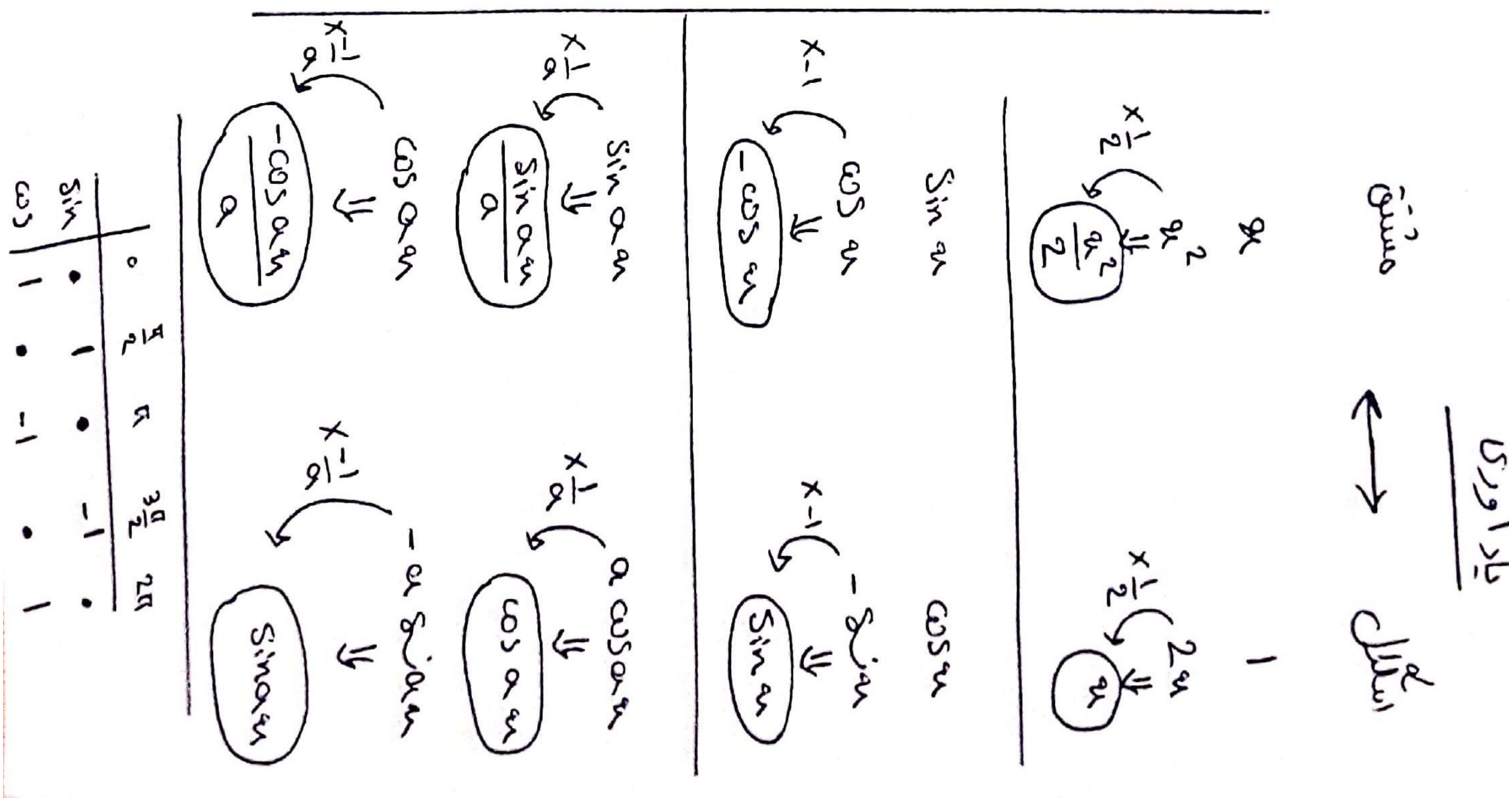
کوچکترین عدد مثبت مانند T (در صورت وجود) که در رابطه $f(x+T)=f(x)$ صدق کند را تناوب اصلی تابع f نامند.

ii) تابع $f(x)$ را زوج گوییم، اگر $f(-x)=f(x)$ و فرد گوییم اگر $f(-x)=-f(x)$. با این فرض که اگر x متعلق به دامنه تعریف باشد، $-x$ هم به این دامنه تعلق داشته باشد.

نکته: اگر تابع $f(x)$ در فاصله $(-l,l)$ پیوسته و زوج باشد، آنگاه $\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{l} f(x)\,dx$

و اگر فرد باشد $\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 0$.

iii) تابع $f(x)$ را در فاصله $[a,b]$ تکه‌ای پیوسته می‌نامیم، اگر نقاطی نظیر $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$ وجود داشته باشند بگونه‌ای که $f(x)$ در بازه (x_i, x_{i+1}) پیوسته و حدهای یک طرفه $f(x_i^+)$ و $f(x_i^-)$ به ازای تمام $i=1,2,\dots,n-1$ وجود داشته باشد. اگر $f'(x)$ هم مانند تابع $f(x)$ شرایط بالا را دارا باشد، $f(x)$ را تکه‌ای هموار نامند.



تعریف: فرض می‌کنیم تابع $f(x)$ در فاصله $(-l, l)$ تعریف شده باشد و $f(x+2l)=f(x)$، **سری فوریه یا بسط فوریه** $f(x)$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right)$$

که در آن a_n و b_n **ضرایب سری فوریه** نامیده می‌شوند و از روابط زیر بدست می‌آیند.

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

مثال 1: سری فوریه تابع $f(x)=1$ برای فاصله $[-\pi, \pi]$ را بنویسید.

حل:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = \frac{x}{\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 1 + 1 = \boxed{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cos \frac{n\pi}{\pi} x \, dx = \frac{1}{n\pi} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \boxed{0}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \sin \frac{n\pi}{\pi} x \, dx = \frac{1}{\pi} \times \frac{-1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{-1}{n\pi} (\cos n\pi - \cos n\pi) = \boxed{0}$$

جایگزاری در فرمول سری فوریه $\rightarrow$ $f(x) = \frac{2}{2} = \boxed{1}$

یادآوری:

$$\int x \sin ax \, dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x \cos ax}{a} + C$$

$$\int x \cos ax \, dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x \sin ax}{a} + C$$

مشتق		انتگرال
x	$+$	$\sin ax$
1	$-$	$-\frac{1}{a} \cos ax$
0		$-\frac{1}{a^2} \sin ax$

مشتق		انتگرال
x	$+$	$\cos ax$
1	$-$	$\frac{1}{a} \sin ax$
0		$-\frac{1}{a^2} \cos ax$

3

مثال ۳ : سری فوریه تابع متناوب $f(x)=-x$ با دوره تناوب 2π را که در فاصله $(-\pi,\pi)$ تعریف شده را بنویسید.

حل:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}-x\,dx=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x^2}{2}\right)_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi^2}{2}-\left(\frac{-\pi^2}{2}\right)\right)=0$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}-x\cos\frac{n\pi}{\pi}x\,dx=\frac{-1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nx\,dx$$

$$=\frac{-1}{\pi}\left(\frac{\cos nx}{n^2}+\frac{x\sin nx}{n}\right)_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{-1}{\pi}\left[\left(\frac{\cos n\pi}{n^2}+\underbrace{\cancel{\frac{\pi\sin n\pi}{n}}}_{\text{صفر}}\right)-\left(\frac{\cos(-n\pi)}{n^2}+\underbrace{\cancel{\frac{-\pi\sin(-n\pi)}{n}}}_{\text{صفر}}\right)\right]$$

$$=\frac{-1}{\pi}\left(\frac{\cos n\pi}{n^2}-\frac{\cos n\pi}{n^2}\right)=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}-x\sin\frac{n\pi}{\pi}x\,dx=\frac{-1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx$$

$$=\frac{-1}{\pi}\left(\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{x\cos nx}{n}\right)_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{-1}{\pi}\left[\left(\underbrace{\cancel{\frac{\sin n\pi}{n^2}}}_{\text{صفر}}-\frac{\pi\cos n\pi}{n}\right)-\left(\underbrace{\cancel{\frac{\sin n(-\pi)}{n^2}}}_{\text{صفر}}-\frac{-\pi\cos n(-\pi)}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{-1}{\pi}\left(\frac{-\pi\cos n\pi}{n}+\frac{-\pi\cos n\pi}{n}\right)=\frac{-1}{\pi}\left(2\times\frac{-\pi\cos n\pi}{n}\right)$$

$$=\frac{2}{n}\cos n\pi\;\begin{cases}\dfrac{2}{n} & n\ \text{زوج}\\[2mm] \dfrac{-2}{n} & n\ \text{فرد}\end{cases}\quad\Longrightarrow b_n=\frac{2}{n}(-1)^n$$

جاگذاری در فرمول سری فوریه

$$f(x)=-x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin nx}{n}$$

یادآوری : می دانیم که $\cos(-x)=\cos x$

$\sin(-x)=-\sin x$

که این مطلب با توجه به تعریف تابع زوج و فرد، بدیهی است.

نکته: اگر تابع $f(x)$ زوج باشد، در این صورت $b_n = 0$ و

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

و اگر $f(x)$ فرد باشد، آنگاه $a_0 = a_n = 0$ و

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

مثال ۳: سری فوریه تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب 2 را که در فاصله $(-1,1)$ به صورت

$f(x) = \begin{cases} 1 & 0<x<1 \\ -1 & -1<x<0 \end{cases}$ تعریف شده است را بیابید.

حل: از آنجایی که $f(-x) = -f(x)$ پس تابع $f(x)$ فرد است. در نتیجه $a_0 = a_n = 0$ و

$$b_n = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\sin\frac{n\pi}{1}x\,dx = 2\int_0^1 \sin n\pi x\,dx = \frac{-2}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^1$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\Big(\underbrace{\cos n\pi}_{\begin{cases}1 & n\ \text{زوج}\\ -1 & n\ \text{فرد}\end{cases}} - \underbrace{\cos 0}_{=1}\Big) = \begin{cases} 0 & n\ \text{زوج} \\ \frac{4}{n\pi} & n\ \text{فرد} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{سری فوریه}} f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1}$$

تذکر: $(2n-1)$ نمایش یک عدد فرد است.

مثال ۴: سری فوریه تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب 2π را که در فاصله $(-\pi,\pi)$ به صورت $f(x) = |x|$ تعریف می‌شود، بنویسید.

حل: $f(x)$ زوج است $\Leftarrow$ $b_n = 0$ و

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \boxed{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |x|\cos\frac{n\pi}{\pi}x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos nx}{n^2} + \frac{x\sin nx}{n}\right)\Big|_0^\pi$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{\cos n\pi}{n^2} + \cancel{\frac{\pi\sin n\pi}{n}}\right) - \left(\frac{\cos 0}{n^2} + 0\right)\right] = \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right) = \begin{cases} 0 & n\ \text{زوج} \\ \frac{-4}{\pi n^2} & n\ \text{فرد} \end{cases}$$

ادامه حل مثال ۴:

$$\xrightarrow{\text{سری فوریه}} \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \frac{-4}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

از آنجایی که n فرد است، می‌نویسیم

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \frac{\cos (2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

مثال 5: سری فوریه $f(x) = -x + \sin x$ را در بازه $[-\pi, \pi]$ به دست آورید.

حل: ابتدا قرار می‌دهیم $g(x) = -x$ ، پس ابتدا سری فوریه $g(x)$ را به دست می‌آوریم. که در مثال 3 حساب شده است. حال جایگذاری می‌کنیم:

$$f(x) = g(x) + \sin x$$

$$\xrightarrow[\text{از مثال 3}]{\text{سری فوریه}} \quad f(x) = \frac{2}{n} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin nx + \sin x$$

و با جایگذاری n های طبیعی داریم:

$$n=1 \longrightarrow f(x) = -2 \sin x + \sin x = -\sin x$$

$$n=2 \longrightarrow f(x) = \sin 2x + \sin x$$

$$\vdots$$

$$\xrightarrow{\text{سری فوریه}} \quad f(x) = -\sin x + \sin 2x - \frac{2}{3} \sin 3x + \frac{2}{4} \sin 4x - \dots$$