بسمه تعالی

جزوه ریاضی عمومی

استاد: ام کلثوم همتی راد

دانشکده فنی و حرفه ای دختران مائده

فصل تابع

تعریف رابطه: هر مجموعه از زوجهای مرتب را یک رابطه دوتایی یا به طور خلاصه رابطه نامیم. فرض کنید R یک رابطه باشد و $(x,y) \in R$ در اینصورت می‌نویسیم xRy و می‌خوانیم « x در رابطه با y است» یا «بین x و y رابطه R برقرار است»

مثال: مجموعه زیر یک رابطه است.

$S_1 = \{(1,2), (2,8), (2,3)\}$ $\quad$ 1,2 $\quad$ 2,8 $\quad$ 2,3

حمله نظامی آمریکا به ایران در طبس (۱۳۵۹ ه‌ش)

تعریف: مجموعه تمام مولفه‌های اول زوجهای مرتب یک رابطه را دامنه رابطه و مجموعه تمام مولفه‌های دوم رابطه را برد رابطه گوییم.

مثال در مثال بالا:

S_1 دامنه $= \{1, 2\}$

S_1 برد $= \{2, 8, 3\}$

تعریف تابع: رابطه f را یک تابع از A به B نامیم اگر دارای دو شرط زیر باشد.

۱- برای هر عضو $x \in A$، عضوی مانند $y \in B$ موجود باشد به طوری که $(x, y) \in f$

۲- اگر $(x,y) \in f$، $(x, z) \in f$ باشد آنگاه $y = z$

(یعنی f هر عضو A را تنها به یک عضو B نسبت می‌دهد)

و به صورت زیر نمایش می‌دهیم

$$f : A \xrightarrow{\text{به}} B$$

نکته: مجموعه A را دامنه تابع گفته و با نماد D_f نمایش می‌دهیم و مجموعه B را برد تابع نامیده و با R_f نمایش می‌دهیم.

نکته: از این پس بجای $(x,y) \in f$ می‌نویسیم $y = f(x)$

تعیین دامنه تابع: هر تابع را با ضابطه، دامنه و برد آن مشخص می‌کنند تعیین دامنه توابع به صورت زیر می‌باشد.

۱- توابع چندجمله‌ای: هر تابع به صورت $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ را یک تابع چندجمله‌ای گوییم و دامنه توابع چندجمله‌ای مجموعه تمام اعداد حقیقی (R) می‌باشد.

مثال: $\left. \begin{array}{l} f(x) = ax^2 + b \\ f(x) = 3x + 4 \end{array} \right\} D_f = R$

۲- توابع کسری: توابعی که به صورت $f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}$ ، $b(x)\neq 0$ می باشند را توابع کسری گوییم (به صورت کسر باشند)

دامنه توابع کسری برابر مجموعه تمام اعداد حقیقی به جز اعدادی است که مخرج را صفر کنند یعنی

$D_f = R - \{$ریشه مخرج$\}$

مثال: دامنه توابع زیر را بدست آورید.

۱) $f(x)=\frac{1}{x}$

ریشه مخرج $\rightarrow x=0$

$D_f = R - \{0\}$

۲) $f(x)=\frac{2x+1}{3x-2}$

ریشه مخرج $\rightarrow 3x-2=0 \rightarrow 3x=2$

$x=\frac{2}{3}$

$D_f = R - \{\frac{2}{3}\}$

۳) $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$

ریشه مخرج $x^2-1=0 \longrightarrow x^2=1 \rightarrow x=\pm\sqrt{1}$

$x=\pm 1$

$D_f = R - \{-1,1\}$

2013 ۱۳۹۲

توابع رادیکالی: توابعی که به صورت $P(x)=\sqrt[n]{Q(x)}$ می باشد را توابع رادیکالی گوییم دامنه توابع رادیکالی با توجه به اینکه فرجه (n) زوج یا فرد باشد متفاوت است.

دامنه توابع رادیکالی با فرجه فرد: اگر فرجه رادیکال فرد باشد رادیکال تاثیری در تعیین دامنه ندارد. و دامنه تابع همان دامنه تابع زیر رادیکال است

مثال: $f(x)=\sqrt[3]{2x^2+3x-1}$ چون فرجه فرد است رادیکال تاثیری ندارد و تابع زیر رادیکال چند جمله‌ای است

$$D_f = R$$

$f(x)=\sqrt[5]{\frac{2x}{x-1}}$ فرجه فرد و رادیکال بی تاثیر است.

ریشه مخرج $\Rightarrow x-1=0 \longrightarrow x=1$

$$D_f = R - \{\text{ریشه مخرج}\} = R-\{1\}$$

توابع رادیکالی با فرجه زوج:

فرجه رادیکال زوج باشد دامنه تابع رادیکالی مجموعه تمام اعداد حقیقی مثبت است

زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر قرار می دهیم)

$$f(x)=\sqrt{P(x)} \longrightarrow D_f = P(x) \geq 0$$

مثال: فرجه زوج است

۱) $f(x) = \sqrt[2]{x}$

$x \geq 0 \longrightarrow D_f = [0, +\infty)$

۲) $f(x) = \sqrt[4]{2x+1}$ فرجه زوج است

$2x+1 \geq 0 \longrightarrow 2x \geq -1 \longrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

$D_f = [-\frac{1}{2}, +\infty)$

نکته: اگر فرجه رادیکال زوج بوده و تابع زیر رادیکال کسری باشد باید دقت کنید که در تعیین دامنه مقادیر صفر را در نظر نگیرید.

مثال: $f(x) = \sqrt{\frac{2}{3x-1}}$ فرجه رادیکال زوج است

$\frac{2}{3x-1} > 0 \longrightarrow 3x-1 > 0 \longrightarrow 3x > 1 \longrightarrow x > \frac{1}{3}$

$D_f = (\frac{1}{3}, +\infty)$

بازه باز است.

$f(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt[3]{x^2-4}}$

صورت $\rightarrow 3-x \geq 0 \rightarrow 3 \geq x \rightarrow D_{\text{صورت}} = (-\infty, 3]$

مخرج $x^2-4=0 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} \rightarrow x = \pm 2$

$D_f = (-\infty, 3] - \{-2, 2\}$

تمرین: دامنه توابع حقیقی زیر را مشخص کنید.

۱) $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$

۲) $f(x) = \dfrac{4x^2 - 9}{2x - 3}$

۳) $f(x) = \dfrac{2x}{3x^2 - 12}$

۴) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 - 7x + 12}$

۵) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

۶) $f(x) = \sqrt{2x - 4}$

۷) $f(x) = \sqrt[6]{x^2 - 1}$

۸) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{2x - 4}}$

۹) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 3}}{x - 5}$

۱۰) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 2}}{2x - 6}$

توابع خاص:

۱- تابع زوج: فرض کنید به ازای هر x از دامنه تابع f، $(-x)$ نیز به دامنه تابع تعلق داشته باشد. تابع f را زوج می‌نامیم هرگاه،

$$f(-x) = f(x)$$

۲- تابع فرد: و تابع f را فرد نامیم هرگاه،

$$f(-x) = -f(x)$$

نکته ۲: اگر هیچ یک از این شرایط برقرار نباشد تابع نه زوج است و نه فرد.

مثال: مشخص کنید کدام یک از توابع زیر زوج یا فرد می باشد.

1) $f(x) = \sqrt[3]{x} + x^5$

حل: $f(-x) = \sqrt[3]{-x} + (-x)^5 = -\sqrt[3]{x} - x^5$

ریشه فرد تاثیری در منفی ندارد

چون توان فرد است منفی بیرون می آید

$= -(\sqrt[3]{x} + x^5) = -f(x) \longrightarrow f(-x) = -f(x)$

تابع فرد است.

2) $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2+1}$

$f(-x) = \dfrac{|-x|}{(-x)^2+1} = \dfrac{|x|}{x^2+1} = f(x)$

تابع زوج است.

3) $f(x) = e^x$

$f(-x) = e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

تابع نه زوج است نه فرد

تمرین: با توجه به تعریف تابع زوج و فرد مشخص کنید کدام یک از توابع زیر زوج یا فرد است.

۱) $f(x) = x^2 + |x| - 2$ ۲) $f(x) = \sqrt[5]{x} + x$

۳) $f(x) = \dfrac{x^2}{|x| + 2x^2}$ ۴) $f(x) = x^3 + x$

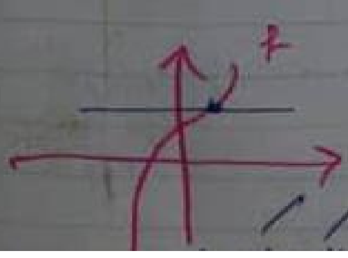
تابع یک به یک: تابع $f: A \longrightarrow B$ را یک به یک گوییم اگر به ازای هر x_1 و x_2 متعلق به دامنه تابع f داشته باشیم

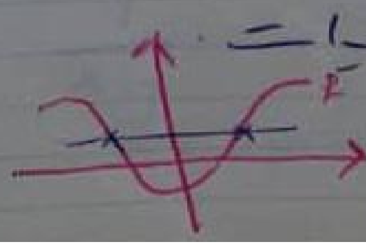
$$x_1 = x_2 \Longleftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

یا

$$x_1 \neq x_2 \Longleftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

تعبیر هندسی: یعنی اگر روی نمودار تابع خطی افقی رسم کنیم تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند تابع f یک به یک است.





یک به یک نیست

تابع مثال : مشخص کنید که کدام یک از توابع زیر یک به یک است ؟

۱) $f(x) = \sqrt[n]{x+5}$

شرط یک به یک بودن
این شرط دوطرفه است .

$x_1 = x_2 \Longleftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

$x_1 = x_2 \xrightarrow{+5} x_1 + 5 = x_2 + 5$

$\xRightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} \sqrt{x_1+5} = \sqrt{x_2+5} \longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

یک به یک است .

۲) $f(x) = \dfrac{|x|-3}{4}$

$f(x_1) = f(x_2) \longrightarrow \dfrac{|x_1|-3}{\cancel{4}} = \dfrac{|x_2-3|}{\cancel{4}} \Rightarrow |x_1| \cancel{-3} = |x_2| \cancel{-3}$

$|x_1| = |x_2| \Longrightarrow x_1 = \pm x_2$

یک به یک نیست

تابع پوشا : تابع $f: A \longrightarrow B$ را که به ازای هر y از برد تابع f عضوی مانند x از دامنه f وجود داشته باشد را یک تابع پوشا نامند . $y = f(x) = y$

(یعنی اگر x را برحسب y بدست آورده و در معادله اولیه قرار دهیم به برابری $y = y$ برسیم)

مثال: آیا تابع $f: R-\{0\} \to R^{+}$ ، $f(x)=\frac{1}{x^2}$ یوشا است؟

$$y=f(x) \to y=\frac{1}{x^2} \xrightarrow{\text{معکوس می‌کنیم}} x^2=\frac{1}{y}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} x=\pm\sqrt{\frac{1}{y}}$$

حال x مقدار را در تابع اولیه قرار می‌دهیم

$$\Rightarrow y=\frac{1}{\left(\pm\sqrt{\frac{1}{y}}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{y}}=y$$

$$\to y=y$$

پس تابع یوشا است.

تابع وارون: اگر تابع $f: A\to B$ یک به یک و یوشا باشد تابعی مانند $f^{-1}: B\to A$ را که به صورت $f^{-1}=\{(y,x) \mid (x,y)\in f\}$ را وارون تابع f نامیم:

نکته: دامنه f^{-1} برد f می‌باشد و برد f^{-1} دامنه تابع f است.

(یعنی جای دامنه و برد عوض می‌شود)
y x

مثال ۱: ابتدا یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کرده و در صورت وجود وارون آن را بیابید.

$f(x) = 3x - 1 \qquad f: R \to R$

مرحله اول

$f(x_1) = f(x_2) \to 3x_1 \cancel{-1} = 3x_2 \cancel{-1} \to 3x_1 = 3x_2$

$\to x_1 = x_2$ یک به یک است

مرحله دوم

x را برحسب y بدست می‌آوریم

$y = 3x - 1 \to 3x = y + 1 \to x = \frac{y+1}{3}$

مرحله سوم

جای x و y را عوض کرده و به جای y، $f^{-1}(x)$ قرار می‌دهیم

$y = \frac{x+1}{3} \to f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$

مثال

$f(x) = \frac{x-2}{x+2}$

مرحله اول برای یک به یک بودن

$f(x_1) = f(x_2) \to \frac{x_1 - 2}{x_1 + 2} = \frac{x_2 - 2}{x_2 + 2}$

$(x_1 - 2)(x_2 + 2) = (x_1 + 2)(x_2 - 2) \Rightarrow \cancel{x_1 x_2} + 2x_1 - 2x_2 \cancel{-4} = \cancel{x_1 x_2} - 2x_1 + 2x_2 \cancel{-4}$

$2x_1 + 2x_1 = 2x_2 + 2x_2 \to 4x_1 = 4x_2 \to x_1 = x_2$

مرحله دوم

x را برحسب y بدست می‌آوریم

$$y = \frac{x-2}{x+2} \Rightarrow x-2 = yx+2y$$

$$x - xy = 2y+2 \longrightarrow x(1-y) = 2y+2$$

$$\longrightarrow x = \frac{2y+2}{1-y}$$

مرحله سوم

جای x و y را عوض کرده به جای y از $f^{-1}(x)$ استفاده می‌کنیم.

$$y = \frac{2x+2}{1-x} \longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x+2}{1-x}$$

تمرین: یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کرده در صورت وجود وارون آنها را بدست آورید.

۱) $f(x) = \frac{3x+1}{x-1}$

۴) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

۲) $f(x) = \sqrt{x-4}$

۳) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+3}{x-8}}$

فصل حد و پیوستگی

گاهی لازم است رفتار تابعی را در نزدیکی نقطه ای بررسی کنیم تا معلوم شود که آیا مقادیر تابع در نزدیکی آن نقطه به عدد ثابتی نزدیک می‌شود یا خیر.

تعریف حد: فرض کنید در تابع f مقدار متغیر (x) به یک عدد ثابت a میل کند (نزدیک شود) آنگاه اگر مقدار تابع به یک عدد ثابت L میل کند (نزدیک شود). عدد L را حد تابع f نامیم و می‌نویسیم

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

می‌خوانیم: حد تابع f وقتی x به سمت عدد a میل می‌کند برابر عدد L است

مثال: حد توابع زیر را در نقاط داده شده بدست آورید.

۱، $\lim_{x \to 2} 2x+1 = 2(2)+1 = 4+1 = 5$

۲، $\lim_{x \to 0} 3x+5 = 3(0)+5 = 5$

نکته: حد هر عدد ثابت در هر نقطه برابر همان عدد است.

مثل: $\lim_{x\to 5} 2 = 2$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0} 3 = 3$

قضایای حد:

۱) اگر c عدد ثابت باشد $\Rightarrow \lim_{x\to a} c\cdot f(x) = c\lim_{x\to a} f(x)$

۲) اگر n عدد حقیقی مثبت باشد $\lim_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$

۳) $\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

۴) $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

۵) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ $\qquad$ اگر $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

$\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ اگر n عدد صحیح و $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ عددی مثبت باشد

۷) $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to a} f(x)\right|$ اگر

۸) $\lim\limits_{x\to a} (mx+n) = ma+n$

مثال: حد توابع زیر را بدست آورید:

۱) $\lim\limits_{x\to -1} (3x^2-1)(x+2) = \lim\limits_{x\to -1} (3x^2-1) \cdot \lim\limits_{x\to -1} (x+2)$

$= (3\lim\limits_{x\to -1} x^2 - 1) \cdot (\lim\limits_{x\to -1} x + 2) = (3(-1)^2 - 1)(-1+2)$

$= 2 \times 1 = 2$

۲) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{5x^3-15} = \sqrt{5(2)^3-15} = \sqrt{40-15} = \sqrt{25} = 5$

نکته : برای تعیین حد یک تابع چند جمله‌ای یا گویا کافی است مقدار تابع را در نقطه مورد نظر محاسبه کنیم مشروط بر اینکه تابع در آن نقطه تعریف شده باشد.

مثال : $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \dfrac{\sqrt{4}-2}{4-4} = \dfrac{0}{0}$ (1)

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = \dfrac{\cancel{3^2}^{\,9}-9}{3-3} = \dfrac{0}{0}$ (2)

در این موارد وقتی جواب حد به صورت $\frac{0}{0}$ یا مبهم می‌شود باید ابتدا تابع را ساده کرده صورت مبهم را حذف کرده بعد حد را محاسبه کنیم.

برای ساده کردن حد (2) از تجزیه استفاده می‌شود.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}} = \lim_{x\to 3} x+3 = 3+3=6$$

برای ساده کردن حد (1) چون رادیکال داریم از روش اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم.

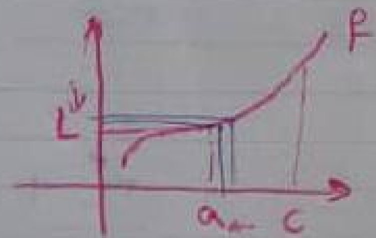
$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \times \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x})^2-2^2}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{\cancel{x-4}}{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$$

حدهای یک طرفه:

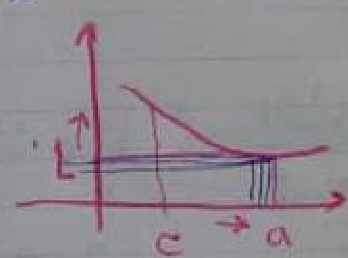
فرض کنید f روی بازه (a,c) تعریف شده باشد اگر وقتی x از سمت راست به a نزدیک می شود یعنی $(x>a)$ آنگاه $f(x)$ به L نزدیک شود L را حد راست f در $x=a$ می نامیم و می نویسیم

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$



فرض کنید f روی بازه (c,a) تعریف شده باشد اگر وقتی x از سمت چپ به a نزدیک می شود یعنی $(x<a)$ آنگاه $f(x)$ به L نزدیک شود L را حد چپ f در $x=a$ نامیم و می نویسیم

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$



مثال ۱: حد راست و چپ تابع زیر را مشخص کنید.

تعریف قدر مطلق
$$|x| = \begin{cases} x & x>0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

حل

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1$$

تعریف: یک تابع در نقطه‌ی $x=a$ حد دارد اگر و تنها اگر حدرات و حدچپ موجود و باهم برابر باشند

حدهای بینهایت:

۱- اگر تابع $f(x)$ وقتی x به a میل می‌کند از هرعدد مثبت بزرگی بزرگتر شود گوئیم $f(x)$ به مثبت بینهایت میل می‌کند و می‌نویسیم

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

۲- اگر تابع $f(x)$ وقتی x به a میل می‌کند از هرعدد منفی کوچکی کوچکتر شود گوئیم $f(x)$ به منفی بینهایت میل می‌کند و می‌نویسیم

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

نکته: اگر جواب حد به صورت $\infty - \infty$ شود مبهم می‌باشد باید ابتدا رفع ابهام کرده بعد دوباره حد را بدست آوریم

مثال: حد تابع زیر را بدست آورید.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{3}{\underbrace{x^2-4}_{(x-2)(x+2)}}\right)=\frac{1}{2-2}-\frac{1}{2^2-4}=\infty-\infty$$

مبهم

رفع ابهام

(مخرج مشترک می‌گیریم)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+2-3}{(x-2)(x+2)}=\lim\frac{x-1}{(x+2)(x-2)}$$

$$=\frac{2-1}{(2+2)(2-2)}=\frac{1}{0}=+\infty$$

حد در بی‌نهایت:

L را حد تابع $f(x)$ گوییم وقتی x به بی‌نهایت مثبت یا منفی میل می‌کند و می‌نویسیم

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=L$$

قضیه: اگر f تابع گویایی با ضابطه

$$f(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_n}$$

باشد آنگاه داریم

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\begin{cases}0 & n<m\\ \pm\infty & m<n\\ \frac{a_0}{b_0} & m=n\end{cases}$$

m،n بزرگترین درجه صورت و مخرج می‌باشد

مثال: حد تابع زیر را بدست آورید. (در حل کردن از بزرگترین درجه صورت و مخرج فاکتور میگیریم)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^3 - 2x + 1}{-2x^3 + 3x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(4 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(-2 + \frac{3}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{4 - \frac{2}{\infty}^{0} + \frac{1}{\infty}^{0}}{-2 + \frac{3}{\infty}^{0}} = \frac{4}{-2} = \boxed{-2}$$

تمرین: حدهای زیر را پس از رفع ابهام محاسبه کنید.

1) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 9x - 10}{x^2 + 3x + 2}$

2) $\lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{x^2 - 5x + 4}$

3) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x - 4}$

4) $\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - 1}$

5) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

6) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 19x - 20}{x^2 - 1}$

۷, $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x^2-x-6}$

۸, $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-3x-4}$

۹, $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$

۱۰, $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+\sqrt{x+2}}{x+1}$

۱۱, $\lim\limits_{x \to 1^-} x^2 + \dfrac{|x|}{x}$

۱۲, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x|}{2x} + x$

۱۳, $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-1}{[x]-1}$

۱۴, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3-8x+1}{-4x^3+3x}$

۱۵, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3-3x^2-1}{8x^3-4}$

۱۶, $\lim\limits_{x \to +\infty} 8x^2-7x^3+3x+1$

پیوستگی تابع: تابع f را در $x=a$ پیوسته گوییم هرگاه دارای سه شرط زیر باشد.

۱- f در a تعریف شده باشد یعنی $f(a)$ موجود باشد

۲- f در a حد داشته باشد یعنی حد راست و چپ برابر باشند.

۳- حد تابع با مقدار تابع در $x=a$ برابر باشد

به طور خلاصه شرط پیوستگی

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

مثال: پیوستگی تابع زیر را در نقطه $x=3$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-6}{x-3} & x \neq 3 \\ 2 & x=3 \end{cases}$$

مقدار = حد و وجود حد است ⇐ شرط پیوستگی

مقدار $f(3)=2$

حل: $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{x-3} = \dfrac{3^2-3-6}{3-3} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

رفع ابهام: $\lim \dfrac{(x-3)(x+2)}{x-3} = \lim_{x\to 3} x+2 = 3+2 = 5$ حد با مقدار برابر نیست

مثال: به ازای چه مقداری از a تابع زیر پیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} ax-1 & x>4^{+} \quad \text{راست} \\ 3x+7 & x \le 4^{-} \quad \text{چپ} \end{cases}$$

پنجشنبه ۲ خرداد

شرط پیوستگی

$$\lim_{x\to 4^{+}} f(x) = \lim_{x\to 4^{-}} f(x) = f(4)$$

رجب ۱۲
23 May

$$\lim_{x\to 4^{+}} f(x) = \lim_{x\to 4^{+}} ax-1 = 4(a)-1 = 4a-1$$

$$f(4) = \lim_{x\to 4^{-}} f(x) = \lim_{x\to 4^{-}} 3x+7 = 3(4)+7 = 19$$

حد راست = حد چپ

جمعه

$$\Rightarrow 4a-1 = 19 \rightarrow 4a = 19+1 \rightarrow 4a = 20$$

۳ خرداد

$$a = \frac{20}{4} = 5$$

رجب ۱۳
24 May

تمرین: پیوستگی توابع زیر را در نقاط داده شده بررسی کنید.

۱) $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & x<-2 \\ x-5 & x \geq -2 \end{cases}$

۲) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$

۳) $f(x) = \begin{cases} x+\dfrac{|x-1|}{x-1} & x \neq 1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$

تمرین: مقادیر a، b را چنان تعیین کنید که توابع داده شده در نقاط خواسته شده پیوسته باشند.

۱) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x}{x-2} & x<2 \\ ax+1 & x \geq 2 \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} ax^2+2bx & x<2 \\ 3 & x=2 \\ -2ax-3b & x>2 \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} 2x+a & x>1 \\ 2 & x=1 \\ bx-1 & x<1 \end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} 2ax^2+bx-3 & x<1 \\ x^3-x+4a & 1\leq x<2 \\ 5x-2b & x>2 \end{cases}$